

## Barem - teorie seniori

### Subiectul I

1. (2.5p) În data de 1 iunie 2011 la ora 21 TU are loc o eclipsă parțială de Soare vizibilă din emisfera nordică a Pământului, iar în data de 15 iunie 2011 va fi vizibilă de la noi o eclipsă totală de Lună la ora 20 TU. Estimați data și ora la care Luna va fi în faza de prim pătrar în iunie 2011.

**Rezolvare:** Dacă în 1 iunie este o eclipsă de Soare atunci Luna este în faza de Lună nouă, elongația ei este zero. În timpul eclipsei de Luna este în faza de Lună plină, elongația ei este  $180^\circ$ . Dacă mișcarea Lunii în jurul Pământului ar fi circular uniformă atunci elongația Lunii este egală cu  $90^\circ$  la jumătatea intervalului dat în ipoteza, 8 iunie ora 20:30 TU. Cum orbita Lunii este concav îndreptată spre Soare, Luna va fi în faza de prim pătrar la în primele ore ale zilei de 9 iunie.

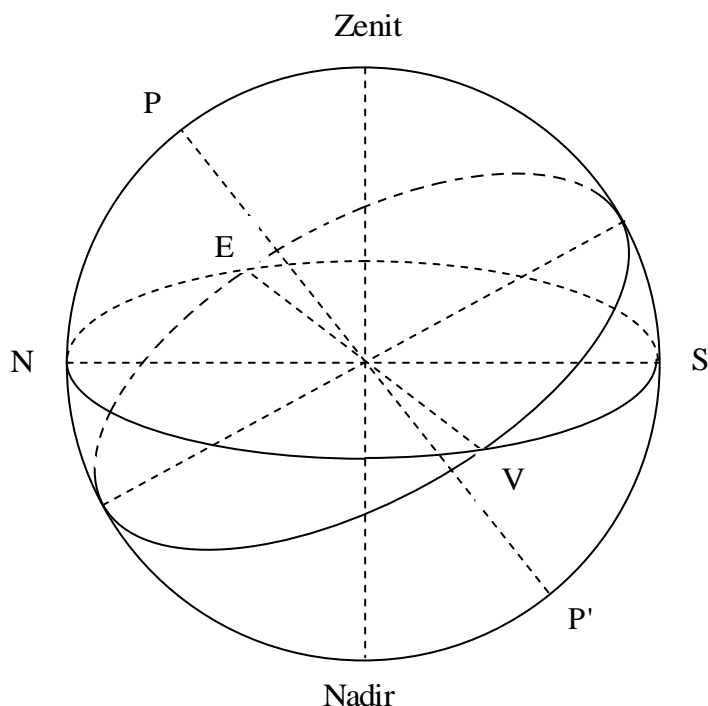
#### Barem de notare:

Eclipsă de Soare – Luna în faza de Lună nouă.....0,75 puncte  
Eclipsă de Lună – Luna în faza de Lună plină.....0,75 puncte  
Prim pătrar la mijlocul perioadei..... 0,5 puncte

**Oficiu.....0,5 puncte**  
**Total.....2,5 puncte**

2. (2.5p) Arătați că planul ecuatorului ceresc taie planul orizontului matematic după dreapta determinată de punctele cardinale est și vest.

**Rezolvare:** Dreapta Zenit-Nadir este perpendiculară pe planul orizontului locului. Axa lumii este perpendiculară pe planul ecuatorului ceresc. De aceea planul determinat de verticala locului și axa lumii este perpendiculară pe dreapta de intersecție a planului ecuatorului ceresc și orizontul matematic.



Verticala locului (Zenit-Nadir) și axa lumii determină meridianul locului, plan în care este inclusă și dreapta determinată de nord sud. În orizontul locului punctele cardinale est-vest determină o dreaptă perpendiculară pe direcția nord-sud. Rezultă că planul meridianului locului este perpendicular pe

direcția est-vest.

Normala la un plan este unică, rezultă că dreapta est-vest este perpendiculară pe planul meridianului locului și ecuatorul ceresc intersectează orizontul locului după dreapta est-vest.

**Barem de notare:**

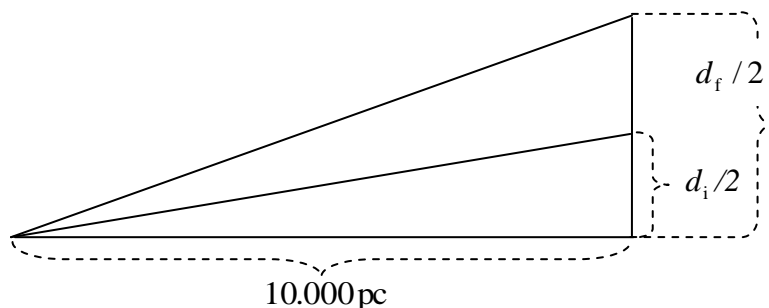
Raționament corect pentru meridianul locului perpendicular pe intersecția celor două plane . 1 punct  
 Dreapta est-vest este perpendiculară pe planul meridianului, normala la un plan e unică .....1 punct

**Oficiu.....0,5 puncte**

**Total.....2,5 puncte**

3. (2.5p) Rămășițele unei supernove se mișcă cu aproximativ 1000 km/s. Presupunând că o supernovă se află la 10000 pc distanță de noi aflați cu cât se modifică diametrul unghiular al acestei supernove într-un an.

**Rezolvare:**



Dacă notăm cu  $u_f$  diametrul unghiular final al supernovei atunci  $tg(\frac{u_f}{2}) = \frac{d_f}{2 \cdot d}$

unde  $d_f$  este diametrul final al supernovei, iar  $d=10000$  pc. Într-un an diametrul supernovei crește cu  $2l = 2v \cdot n = 2 \cdot 3,16 \cdot 10^{10}$  km, unde  $n = 365,2422 \cdot 24 \cdot 3600 = 3,16 \cdot 10^7$  s.

Dacă notăm diametrul inițial al supernovei  $d_i$ , diametrul ei final este  $d_i + 2 \cdot l$ .

Unghiul sub care se vede supernova este mic, de aceea aproximăm tangenta lui cu valoarea unghiului exprimată în radiani. Obținem  $u_f = u_i + \frac{2l}{d} = 0,0042'$ .

**Barem de notare:**

Calculul creșterii diametrului liniar al supernovei.....0,75 puncte

Legătura dintre diametrul liniar și cel unghiular al supernovei.....0,5 puncte

Calculul creșterii diametrului unghiular al supernovei.....0,75 puncte

**Oficiu.....0,5 puncte**

**Total.....2,5 puncte**

4. (2.5p) În jurul unei galaxii masive orbitează o altă galaxie. Perioada orbitală a mișcării galaxiei este de 50 de miliarde de ani, iar distanța dintre ele este de 0,5 milioane de pc. Aflați suma maselor galaxiilor exprimată în mase solare.

**Rezolvare:** Din legea a treia a lui Kepler scrisă pentru sistemul de galaxii

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (M_{g1} + M_{g2})}$$

unde la numitor este masa totală a galaxiilor și sistemul Soare-Pământ

$$\frac{P_p^2}{a_p^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (M_s + M_p)}$$

prin împărțire găsim masa totală a galaxiilor

$$M_{g1} + M_{g2} = \frac{a^3}{P^2} = 4,3 \cdot 10^{11} \cdot M_s,$$

unde semiaxa mare a sistemului este dată în unități astronomice  $a = 5 \cdot 10^5 \cdot 206265 \text{u.a}$  și perioada orbitală în ani siderali.

**Barem de notare:**

Scrierea legii a treia a lui Kepler pentru galaxii..... 1 punct

Folosirea legii a treia a lui Kepler în sistemul solar pentru a afla masa totală a galaxiilor în sistemul solar..... 1 punct

**Oficiu.....0,5 puncte**

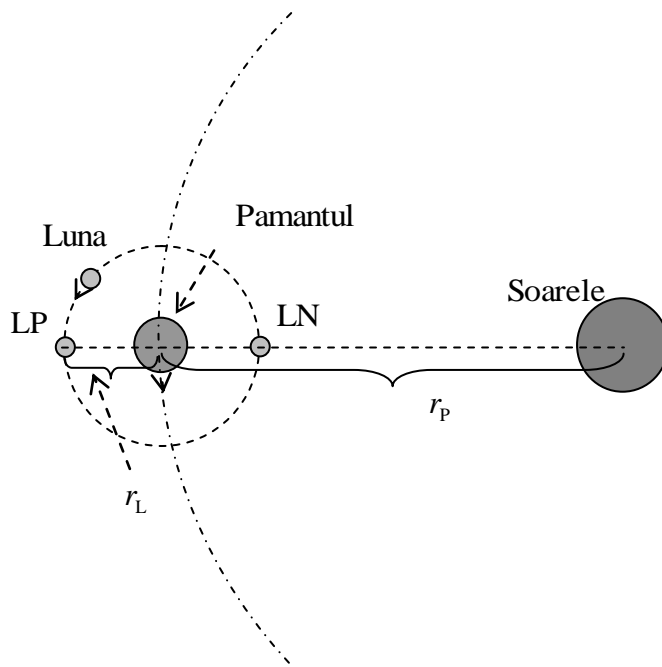
**Total.....2,5 puncte**

**Subiectul II**

(10p) În raport cu centrul Pământului, traiectoria centrului Lunii este un cerc cu raza

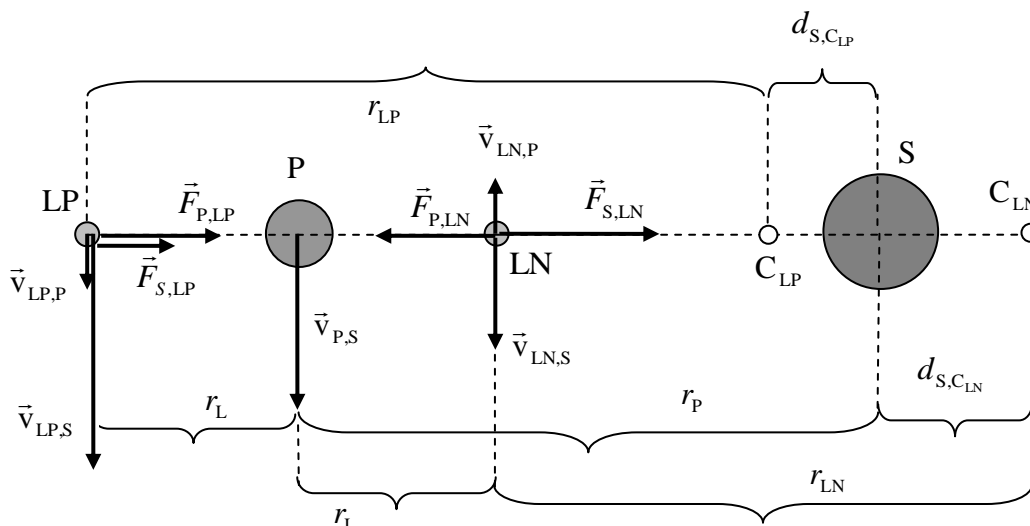
$r_L = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ua}$ . În raport cu centrul Soarelui, traiectoria centrului Pământului este un cerc cu raza  $r_p = 1 \text{ua}$ . Ca urmare, traiectoria centrului Lunii, în raport cu centrul Soarelui, este mult mai complicată.

Să se determine razele de curbură ale traiectoriei centrului Lunii, în pozițiile indicate de figura alăturată, corespunzătoare fazelor: 1) Lună Plină; 2) Lună Nouă. Să se localizeze centrele de curbură ale traiectoriei centrului Lunii în cele două cazuri, în raport cu centrul Soarelui. Se cunoaște raportul maselor  $M_p / M_s = 3 \cdot 10^{-6}$ .



**(1 punct din oficiu)**

Forțele care acționează asupra Lunii, din partea Pământului și din partea Soarelui, în fiecare din variantele propuse, precum și vitezele elementelor sistemului, sunt cele reprezentate în figura alăturată.



(1,5 puncte pentru desenul explicativ complet)

1) (3,5 puncte)

Pentru Luna Plină am notat:  $\vec{v}_{LP,P}$  - viteza Lunii Pline în raport cu Pământul;  $\vec{v}_{LP,S}$  - viteza Lunii Pline în raport cu Soarele;  $\vec{v}_{P,S}$  - viteza Pământului în raport cu Soarele. Rezultă:

$$F_{P,LP} + F_{S,LP} = \frac{M_L v_{LP,S}^2}{r_{LP}}; \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

$$K \frac{M_L M_P}{r_L^2} + K \frac{M_L M_S}{(r_L + r_P)^2} = \frac{M_L v_{LP,S}^2}{r_{LP}}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$\vec{v}_{LP,S} = \vec{v}_{LP,P} + \vec{v}_{P,S}; \quad v_{LP,S} = v_{LP,P} + v_{P,S}; \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

$$K \frac{M_P}{r_L^2} + K \frac{M_S}{(r_L + r_P)^2} = \frac{(v_{LP,P} + v_{P,S})^2}{r_{LP}}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$v_{LP,P} = \sqrt{K \frac{M_P}{r_L}}; \quad v_{P,S} = \sqrt{K \frac{M_S}{r_P}}; \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

$$K \frac{M_P}{r_L^2} + K \frac{M_S}{(r_L + r_P)^2} = \frac{\left( \sqrt{K \frac{M_P}{r_L}} + \sqrt{K \frac{M_S}{r_P}} \right)^2}{r_{LP}}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$KM_S \left[ \frac{M_P}{M_S} \frac{1}{r_L^2} + \frac{1}{(r_L + r_P)^2} \right] = KM_S \frac{\left( \sqrt{\frac{1}{r_P}} + \sqrt{\frac{M_P}{M_S} \frac{1}{r_L}} \right)^2}{r_{LP}}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$r_{LP} = \frac{\left( \sqrt{\frac{1}{r_P}} + \sqrt{\frac{M_P}{M_S} \frac{1}{r_L}} \right)^2}{\frac{M_P}{M_S} \frac{1}{r_L^2} + \frac{1}{(r_L + r_P)^2}}; \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

$$r_{LP} \approx 0,7 \text{ ua}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$d_{S,LP} = r_P + r_L = 1,00257 \text{ ua};$$

$$r_{LP} < d_{S,LP},$$

astfel încât centrul de curbură al traiectoriei Lunii, în raport cu Soarele, atunci când Luna este în faza de Lună Plină, punctul  $C_{LP}$ , este localizat așa cum indică figura alăturată, el aflându-se, față de Soare, la distanța:

$$d_{S,C_{LP}} = \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} r_L + r_L = 1 \text{ ua} + 0,00257 \text{ ua} - 0,7 \text{ ua} = 0,30257 \text{ ua} \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte.}$$

2) (3,5 puncte)

Pentru Luna Nouă, am notat:  $\vec{v}_{LN,P}$  - viteza Lunii Noi în raport cu Pământul;  $\vec{v}_{LN,S}$  - viteza Lunii Noi în raport cu Soarele. Rezultă:

$$F_{S,LP} - F_{P,LN} = \frac{M_L v_{LN,S}^2}{r_{LN}}; \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

$$K \frac{M_L M_S}{\overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} r_L} - K \frac{M_L M_P}{r_L^2} = \frac{M_L v_{LN,S}^2}{r_{LN}}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$\vec{v}_{LN,S} = \vec{v}_{LN,P} + \vec{v}_{P,S}; \quad v_{LP,S} = v_{P,S} - v_{LN,P}; \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

$$K \frac{M_S}{\overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} r_L} - K \frac{M_L M_P}{r_L^2} = \frac{\overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} v_{P,S} - v_{LN,P}}{r_{LN}}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$v_{LN,P} = \sqrt{K \frac{M_P}{r_L}}; \quad v_{P,S} = \sqrt{K \frac{M_S}{r_P}}; \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

$$K \frac{M_S}{\overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} r_L} - K \frac{M_P}{r_L^2} = \frac{\left( \sqrt{K \frac{M_S}{r_P}} - \sqrt{K \frac{M_P}{r_L}} \right)^2}{r_{LN}}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$KM_S \left[ \frac{1}{\overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} r_L} - \frac{M_P}{M_S} \frac{1}{r_L^2} \right] = KM_S \frac{\left( \sqrt{\frac{1}{r_P}} - \sqrt{\frac{M_P}{M_S} \frac{1}{r_L}} \right)^2}{r_{LN}}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$r_{LN} = \frac{\left( \sqrt{\frac{1}{r_P}} - \sqrt{\frac{M_P}{M_S} \frac{1}{r_L}} \right)^2}{\frac{1}{\overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} r_L} - \frac{M_P}{M_S} \frac{1}{r_L^2}}; \dots\dots\dots 0,5 \text{ puncte}$$

$$r_{LN} \approx 1,8 \text{ ua}; \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

$$d_{S,LN} = r_P - r_L = 0,99743 \text{ ua};$$

$$r_{LN} > d_{S,LN},$$

astfel încât centrul de curbură al traiectoriei Lunii, în raport cu Soarele, atunci când Luna este în faza de Lună Nouă, punctul  $C_{LN}$ , este localizat așa cum indică figura alăturată, el aflându-se, față de Soare, la distanța:

$$d_{S,C_{LN}} = r_{LN} - \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} r_L = 1,8 \text{ ua} - 0,99743 \text{ ua} = 0,80257 \text{ ua} \dots\dots\dots 0,25 \text{ puncte}$$

(0,5 puncte) **Concluzie:** cele două centre de curbură se află, de o parte și de cealaltă parte a Soarelui, dispuse asimetric.

### Subiectul III

(10p.) Secvența principală a unui roi stelar conține stele de magnitudine bolometrică absolută zero, dar nu mai strălucitoare. Să se afle vârsta roiului stelar, presupunând că temperatura centrală a stelelor rămâne constantă cât timp steaua se află pe secvența principală. Temperatura centrală a stelei este proporțională cu raportul dintre masa și raza ei. Stelele părăsesc secvența principală după ce și-au consumat 20% din hidrogenul lor inițial. Se dau următoarele date masa Soarelui este  $2 \times 10^{30}$  kg, temperatura efectivă a Soarelui este 5800 K, luminozitatea Soarelui este  $4 \cdot 10^{26}$  J/s, magnitudinea absolută a Soarelui este  $+4.75^m$ , o stea de magnitudine bolometrică  $0,0^m$  are temperatura efectivă de 11000 K, iar energia eliberată prin transformarea hidrogenului în heliu este  $6,6 \cdot 10^{14}$  J/kg.

**Rezolvare:** Vârsta roiului este  $t = \frac{E_t}{L}$ , unde  $E_t$  este energia totală emisă de stea, iar  $L$  luminozitatea ei.

Primele care părăsesc secvența principală sunt stelele care au luminozitatea cea mai mare, de aceea în calculul vârstei folosim luminozitatea stelelor de magnitudine  $0^m$ .

Luminozitatea stelelor în luminozități solare este

$$\frac{L}{L_s} = 10^{-0,4(M-M_s)} = 10^{1,9} = 79,43. \quad (1)$$

unde  $M = 0,0^m$ ,  $M_s = 4,75^m$  iar  $L_s$  este luminozitatea Soarelui.

Energia emisă de stea se obține prin arderea hidrogenului la temperatură centrală constantă. Rezultă că

$$T_c = k \cdot \frac{M}{R} = k \cdot \frac{M_s}{R_s} \quad (2)$$

unde  $k$  este o constantă de proporționalitate, și cu indice S am notat mărimile referitoare la Soare.

Luminozitatea stelei este  $L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$  și raportul luminozităților după simplificare devine

$$\frac{L}{L_s} = \left(\frac{R}{R_s}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_s}\right)^4. \quad (3)$$

Din (1) și (3) găsim raza stelei în raze solare

$$\left(\frac{R}{R_s}\right) = 10^{0,95} \cdot \left(\frac{T_s}{T}\right)^2 \quad (4)$$

iar din (2) și (4)

$$M = 10^{0,95} \cdot \left(\frac{T_s}{T}\right)^2 \cdot M_s = 4,956 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

Steaua și-a consumat 20% din hidrogenul inițial, de aceea energia totală este

$$E_t = 0,2 \cdot M \cdot E = 6,54 \cdot 10^{44} \text{ J, } L = 3,177 \cdot 10^{28} \text{ J/s și } t = 2,059 \cdot 10^{16} \text{ s} = 6,52 \cdot 10^8 \text{ ani.}$$

#### Barem de notare:

Formula de calcul a vârstei roiului.....	1 punct
Luminozitatea unei de magnitudine 0.....	2 puncte
Relația dintre luminozități-raze-temperaturi.....	2,5 puncte
Relația dintre raze și temperatură.....	1,5 puncte
Energia eliberată.....	1 punct
Vârsta roiului.....	1 punct

**Oficiu.....1 punct**

**Total.....10 puncte**